

dr Agnieszka Szymocha

Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

dr hab. Lidia Luty, prof. URK

Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

Analiza wykresów funkcji – wiedza czy wyzwanie Matematyka jako język komunikacji

Streszczenie

Rozwinięte teorie matematyczne to uniwersalne narzędzie, które trwale łączy abstrakcję z praktyką. Dlatego symbolika i algorytmy, jakimi się posługuje, stanowią uniwersalny język komunikacji. Celem niniejszego artykułu jest próba przedstawienia, jak ważny, uniwersalny jest to system komunikacji i w jaki sposób możemy się go uczyć. W opracowaniu przedstawiono wyniki pilotażowych badań, które miały na celu zweryfikowanie wiedzy studentów w zakresie odczytywania własności funkcji na podstawie wykresu. Ta umiejętność jest jedną z wielu wymaganych w zakresie kształcenia studentów kierunków ekonomia oraz finanse i rachunkowość.

Słowa kluczowe: analiza funkcji, wykres funkcji, edukacja matematyczna, kompetencje matematyczne, studenci kierunków ekonomicznych

Wstęp

Matematyka to uniwersalny system komunikacji służący do opisu zjawisk od mechaniki kwantowej po finanse oraz otaczający nas świat. Posiada własne słownictwo (liczby, symbole) oraz gramatykę (logikę, aksjomaty), umożliwiające precyzyjne wyrażanie pojęć.

Matematyka rozwijała się od czasów prehistorycznych, rozszerzając swój zakres, pogłębiając treści i doskonaląc formę. W czasach prehistorycznych rozwój ten był niezależny w różnych częściach świata. Wbrew pozorom załącznikiem matematyki nie były liczby, lecz równoliczność zbiorów. Polegała ona na przyporządkowaniu w sposób wzajemnie jednoznaczny elementom jednego zbioru elementy drugiego. Miało to odzwierciedlenie w pierwotnym handlu: sztuka za sztukę¹. Współcześnie o takiej relacji mówimy „funkcja”.

Samo pojęcie „matematyka” (z łac. *mathematicus*, od gr. *μαθηματικός* *mathēmatikós*, od *mathēma*) kryje w sobie słowa: nauka, lekcja, poznanie i wiąże się ściśle z prowadzeniem rozumowania i wyciąganiem wniosków z przyjętych założeń². I właśnie poznanie i potrzeby samego życia, na przełomie wieków, doprowadziły do powstania wielu działów matematyki, takich

¹ *Encyklopedia szkolna. Matematyka*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1989.

² <https://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka> [dostęp: 10.07.2026].

jak: algebra, analiza matematyczna, geometria, statystyka, kombinatoryka czy teoria mnogości. Ten nieprzeciętny obszar rozwiniętych teorii matematycznych stał się znaczący w wielu dziedzinach nauki, począwszy od techniki, inżynierii, ekonomii, a skończywszy na naukach humanistycznych (filozofii czy religii). I chociaż opisywane przez matematykę obiekty zazwyczaj są abstrakcyjne, są wyidealizowanymi tworam, to zastosowanie odpowiednich założeń umożliwia odniesienie jej do zjawisk i elementów tworzących rzeczywistość życia codziennego. **Matematyka zwyczajnie stała się językiem komunikacji.** I jest to język uniwersalny dla specjalistów inżynierów, techników, bankierów, ekonomistów, prawników czy medyków.

Nauczanie matematyki

Jeden, dwa, jeden, dwa, pewna pani miała psa. Trzy i cztery, trzy i cztery, pies ten dziwne miał maniery. Pięć i sześć, pięć i sześć, pies ten kości nie chciał jeść. Siedem, osiem, siedem, osiem, wciąż o lody tylko prosił. Dziewięć, dziesięć, dziewięć, dziesięć, kto te lody mu przyniesie? Może ja, może Ty? Licz od nowa: raz, dwa, trzy!

Nauczanie matematyki zaczyna się już przed przedszkolem. Cieszymy się, gdy dziecko na palcach ręki wskaże, ile ma lat, dajemy dziecku do zabawy klocki i uczymy rozpoznawać kształty oraz dopasowywać je do odpowiednich form, układamy wspólnie puzzle i śpiewamy wyliczanki. I właśnie wtedy pojawiają się pierwsze pojęcia matematyczne: liczby, figury, zbiory. Potem dzieciaki poznają rówieśników, grają w klasy na podwórku, rysują plansze na chodniku, tworzą drużyny graczy, dzieląc grupę na zbiory. Gry i zabawy, które ćwiczą dziecięcą wyobraźnię i logikę, można by wymieniać bez końca. To jest nauka matematyki. Przebiega w przyjaznej atmosferze i co więcej, korzystają z niej wszystkie chętne dzieciaki, jest twórcza i niesie wiele radości. Warto zwrócić uwagę, że dzieciaki wracają do tych zabaw, co oznacza, że poznaną wiedzę powtarzają i utrwalają. Niestety, czasy szkolne modyfikują ten proces poznawczy. Przedmiot matematyka dla wielu uczniów, a czasami ich rodziców, już w szkole podstawowej wiąże się z trudnościami, strachem i porażką.

Przyjęta podstawa programowa z matematyki ma w założeniu stanowić wsparcie dla innych dziedzin nauki. Jej podstawowymi fundamentami są: nauka matematycznego rozumowania, kształtowanie sprawności rachunkowej oraz zdobywanie wiedzy o właściwościach obiektów matematycznych³. Trudno się nie zgodzić ze słusznością powyższych założeń. Kwestią jest raczej, ile wiedzy możemy przekazać w ciągu nauczania podstawowego oraz w szkołach średnich, jakich narzędzi użyć i ile mamy czasu do dyspozycji. Co więcej, jeśli matematyka jest elementem do komunikowania się na innych przedmiotach, to jej słownictwo i algorytmy powinny być poznane na tyle wcześniej i na tyle dobrze, żeby nie stanowiły bariery językowej. Może warto więc zastanowić się, czy w nauczaniu matematyki na poziomie wczesnoszkolnym nie zastosować metod takich, jak przy uczeniu języków obcych: pracować w mniejszych grupach, stosować gry i zabawy, powtarzać wielokrotnie poznane treści i ukazywać zastosowanie w sytuacjach życia codziennego. Nauka pojęć powinna zawsze opierać się na modelach i doświadczeniu, a nie na bezrefleksyjnym

³ <https://zpe.gov.pl/podstawa-programowa/szkola-ponadpodstawowa/matematyka> [dostęp: 10.07.2026].

zapamiętywaniu symboli. Nauczanie matematyki wymaga zrozumienia struktur i logicznego dowodzenia, a nie tylko „wkuwania na pamięć”. Podczas gdy języki służą głównie komunikacji, matematyka opiera się na **rozumowaniu dedukcyjnym i rozwiązywaniu problemów**.

Matematyka na kierunkach studiów ekonomia, finanse i rachunkowość

Przykłady dziedziny nauki, które w znaczącym stopniu wykorzystują wiedzę matematyczną, umiejętność logicznego myślenia i tworzenia algorytmów do opisu rzeczywistości jest ekonomia oraz finanse i rachunkowość.

Ekonomia jest nauką, której głównym celem jest opis funkcjonowania gospodarki zarówno w sensie globalnym, jak i pojedynczych podmiotów. Poznanie mechanizmów jej działania prowadzone jest na płaszczyźnie teoretycznej, a następnie stosowane w praktyce. Tworzone hipotezy i teorie ekonomiczne są weryfikowane na podstawie danych empirycznych. Taki proces jest podstawą do wyciągnięcia odpowiednich wniosków w celu ulepszenia stanu badanego zakresu gospodarki⁴.

Finanse i rachunkowość to kierunek nauki, który koncentruje się głównie na poznaniu sposobów zarządzania środkami pieniężnymi w instytucjach i przedsiębiorstwach. Specjaliści w tym zakresie kierowani są głównie do działania w zarządzaniu transakcjami finansowymi, inwestycjami kapitałowymi i optymalną alokacją przepływów pieniężnych⁵. Analizując sylwetkę i zakres działań specjalistów ekonomii i rachunkowości jest uzasadnione, aby w ich programie kształcenia znalazła się matematyka i jej pokrewne dziedziny. Oczywiście matematyka ma stanowić jedynie użyteczne narzędzie w pracy, a nie przedmiot sam w sobie⁶. Powinna być stosowana w określonych celach, a użyte teorie analizowane z przyjętymi założeniami. Implikuje to fakt, że wiedza matematyczna absolwentów szkół średnich musi być na tyle dobra, by mogli posługiwać się tym językiem swobodnie w strefie kształcenia wyższego.

Analiza własności funkcji – wyniki eksperymentu

Problemy studentów z matematyką na poziomie akademickim są złożone i wynikają zarówno z luk edukacyjnych, jak i różnic w podejściu do nauczania (abstrakcja vs procedury). Do najczęstszych wyzwań należy brak fundamentów z poprzednich etapów kształcenia. Studenci często nie posiadają solidnej wiedzy z algebry, trygonometrii czy funkcji, co uniemożliwia zrozumienie bardziej zaawansowanych zagadnień, takich jak granice, pochodne lub całki, a które są niezbędne do pracy na kolejnych etapach studiów.

Diagnostyka edukacyjna studentów z matematyki (często określana jako diagnoza wstępna lub diagnostyka na wejściu) to proces rozpoznawania poziomu wiedzy, umiejętności oraz błędnych przekonań studentów przed rozpoczęciem właściwego kursu akademickiego. Jej głównym celem jest zidentyfikowanie

⁴ <https://rocketjobs.pl/blog/czym-sie-rozni-kariera-w-finansach-od-kariery-w-ekonomii> [dostęp: 10.07.2026].

⁵ Tamże.

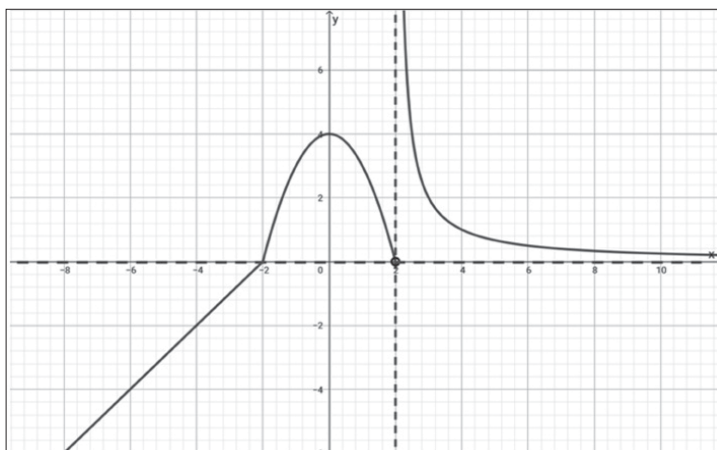
⁶ W. Kwaśnicki, *O matematyzacji ekonomii. Na marginesie artykułu S. Małeckiego-Tepichta, „Ekonomista” 2012, nr 3, s. 381–390.*

luk w edukacji szkolnej, co umożliwiłoby dostosowanie tempa i metod nauczania do rzeczywistych potrzeb grupy. Głównym celem dydaktycznym analizy funkcji jest rozwinięcie umiejętności modelowania matematycznego i logicznego myślenia. Uczniowie/studenci uczą się wizualnego interpretowania zjawisk, przekładania graficznego obrazu na język symboli oraz badania zachowania zmiennych w czasie lub przestrzeni.

Celem przeprowadzonej diagnozy była identyfikacja aktualnego stanu wiedzy przed realizacją programu z zakresu rachunku różniczkowego i całkowego. Eksperyment polegał na sprawdzeniu, czy na bazie posiadanej wiedzy i umiejętności ze szkoły średniej i zajęć z matematyki na studiach studenci potrafią prawidłowo odczytać wybrane własności funkcji przedstawionej na wykresie.

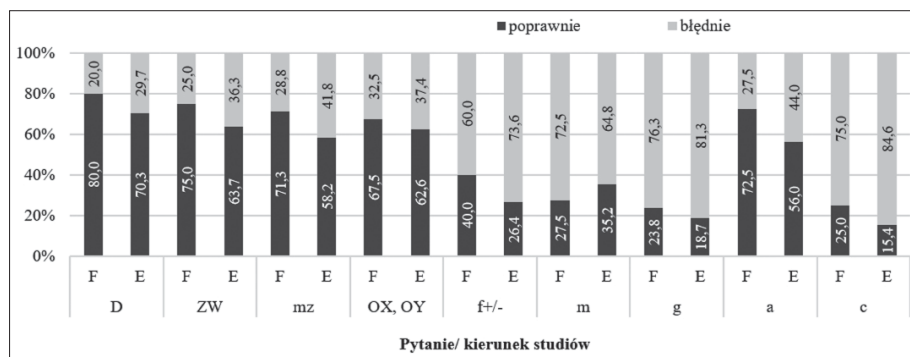
Badanie przeprowadzono w kwietniu 2026 roku na grupie studentów I roku kierunków finanse i rachunkowość oraz ekonomia na Uniwersytecie Rolniczym im. Hugona Kołłątaja w Krakowie. Próba liczyła 171 obserwacji, z czego 53,2% wyników dotyczyło kierunku ekonomia, a pozostałe 46,8% finanse i rachunkowość. Zadanie polegało na odczytaniu z wykresu następujących własności funkcji (rys. 1):

1. (D) dziedzina,
2. (ZW) zbiór wartości,
3. (mz) miejsca zerowe,
4. (OX, OY) współrzędne punktów przecięcia z osiami układu współrzędnych,
5. (f +/-) maksymalny zbiór argumentów, dla których funkcja jest dodatnia/ujemna,
6. (m) przedziały monotoniczności,
7. (g) granice funkcji na krańcach dziedziny,
8. (a) asymptoty wykresu funkcji,
9. (c) ciągłość funkcji.



Rysunek 1. Przykładowy wykres funkcji $y=f(x)$ dołączony do zadania
Źródło: opracowanie własne.

Pierwsze sześć własności funkcji jest objęte podstawą programową szkoły średniej w zakresie podstawowym, natomiast pozostałe występują tylko w zakresie rozszerzonym lub w programie studiów. Na rysunku 2 zostały przedstawione odpowiedzi studentów w zależności od kierunku studiów: F – finanse i rachunkowość, E – ekonomia.



Rysunek 2. Struktura odpowiedzi na pytania według kierunku studiów. Symbole F i E identyfikują kierunki, odpowiednio finanse i rachunkowość oraz ekonomię

Źródło: opracowanie własne, oznaczenia według treści zadania.

Studenci kierunku finanse i rachunkowość (F) poradzili sobie lepiej w ośmiu z dziewięciu badanych własności. Może to wynikać z wyższego progu rekrutacyjnego (lepsze przygotowanie ze szkoły średniej) lub większego rygoru w precyzji myślenia na tym kierunku. Jedynym obszarem, w którym studenci ekonomii (E) okazali się lepsi (35,2% vs 27,5% dla F), jest monotoniczność. Może to wynikać ze specyfiki wykładów na ekonomii, gdzie pojęcia „wzrost” i „spadek” (np. popytu, podaży) są kluczowymi kategoriami intuicyjnymi, częściej omawianymi na bazie wykresów. Najlepiej opanowane pojęcia to dziedzina (D) i zbiór wartości (ZW) (wyniki powyżej 63%). Są to zagadnienia intensywnie ćwiczone w szkole średniej („od lewej do prawej”, „od dołu do góry”). Trudnością na wykresie były najprawdopodobniej asymptota i punkt (2,0). Miejsca zerowe (mz) i punkty przecięcia z osiami (OX, OY) to pojęcia o charakterze czysto punktowym (statycznym). Odczytanie ich z wykresu wymaga jedynie podstawowej spostrzegawczości, stąd relatywnie wysoka poprawność (wyniki na poziomie 58–71%). Poprawność odpowiedzi spada drastycznie do 40% (F) i zaledwie 26,4% (E) przy interpretacji znaku funkcji (f+/-). Studenci bardzo często mylą pojęcie wartości dodatnich/ujemnych z monotonicznością (mówią, że funkcja jest dodatnia, bo „rośnie”). Mały odsetek badanych poprawnie wskazał przedziały monotoniczności (m) (27,5% F / 35,2% E). Dlaczego wyniki są tak niskie? Jednym z błędów dydaktycznych studentów w tym miejscu jest nieprawidłowe stosowanie symbolu sumy przy łączeniu przedziałów monotoniczności. Pojęcia granic (g) i ciągłości (c) wymagają zrozumienia nieskończoności i przejść granicznych. Wynik poniżej 25% poprawnych odpowiedzi wskazuje, że dla studentów pierwszego roku pojęcie granicy to abstrakcja, nie potrafią jej poprawnie zapisać ani zinterpretować. Zwraca uwagę zaskakująco wysoka poprawność w wyznaczaniu asymptot (72,5%

dla F i 56,0% dla E), która stoi w jawnej sprzeczności z wynikami z granic (g) i ciągłości (c). Z punktu widzenia teorii asymptotę definiuje się za pomocą granic. Jak to możliwe, że studenci znaleźli asymptoty, nie rozumiejąc granic? Odpowiedź tkwi w „rozumieniu geometryczno-obrazowym”. Studenci potrafili wskazać tę linię jako coś „wyjątkowego” (asymptotę), działając mechanicznie, bez głębszego rozumienia aparatu matematycznego, który za nią stoi. Wyniki badań pokazują, że studenci pierwszych lat ekonomii i finansów potrafili „skanować” wykres wzrokiem (znajdują punkty, linie przerywane, dziedzinę), ale kompletnie zawodzą na poziomie zapisu formalnego i pojęć dynamicznych.

Warto jednak wspomnieć, że analiza własności funkcji na podstawie wykresu jest namiastką wiedzy, jaką powinni znać studenci badanych kierunków po semestralnym kursie matematyki. W zestawie treści kształcenia pojawiają się między innymi jeszcze takie zagadnienia jak: algebra macierzy, układy równań i nierówności wielu zmiennych, rachunek różniczkowy i całkowy. W praktyce jest to niezbędny zestaw narzędzi matematycznych w analizie statystycznej, ekonometrycznej oraz w rozwiązaniach problemów optymalizacji⁷. Zagadnienia te nie stanowią zestawu podstawy programowej z matematyki w kształceniu ogólnym szkoły średniej. Czas przeznaczony na realizację uczenia studentów niezbędnych treści jest znacząco niewystarczający. Prawidłowe i efektywne posługiwanie się nowymi pojęciami i relacjami występującymi między nimi wymaga wielu godzin ćwiczeń, powtarzania, analizowania, szukania zastosowania w praktyce.

Podsumowanie

Matematyka stała się podstawowym językiem komunikacji między specjalistami od dziedzin technicznych poprzez ekonomiczne aż do humanistycznych. Ten język charakteryzuje się specyficzną symboliką, teoriami, algorytmami, które opisują abstrakcyjne obiekty. Ale przy odpowiednich założeniach stosuje się język użyteczny w objaśnianiu zjawiska świata rzeczywistego. Jak się go uczyć? Nie ma jednoznacznej odpowiedzi, ale może warto szukać dobrych i skutecznych metod.

„Prawda czy wyzwanie” jest grą towarzyską przeznaczoną dla co najmniej trzech uczestników. W przedstawionym wariantcie do wyłaniania osoby wykonującej zadanie wykorzystuje się butelkę umieszczoną na środku kręgu utworzonego przez uczestników. Jeden z graczy wprawia butelkę w ruch obrotowy, a po jej zatrzymaniu osoba wskazana przez szyjkę butelki zostaje poproszona o wybór jednej z opcji: „prawda” lub „wyzwanie”. W przypadku wyboru opcji „prawda” uczestnik odpowiada na zadane pytanie, udzielając szczerzej odpowiedzi. W przypadku wyboru opcji „wyzwanie” wykonuje zadanie zaproponowane przez pozostałych graczy. Po zakończeniu swojej tury wybrany uczestnik przejmuje rolę osoby obracającej butelkę, rozpoczynając kolejną rundę gry.

⁷ A. Arkit, *Realia i efektywność nauczania matematyki na kierunkach ekonomicznych*, „Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej” 2021, nr 72.

Jest to popularna gra wśród młodzieży. Zabawniej jest, im ciekawsze jest pytanie albo wyzwanie. Jej zastosowanie mogłoby się sprawdzić w weryfikacji wiedzy, która była tematem wspomnianego badania ankietowego przedstawionego w artykule. Ciekawe, czy uzyskane wyniki byłyby podobne. Może warto na poziomie studenckim i nie tylko wrócić do sprawdzonych metod nauczania? Jest to wyzwanie dla nauczycieli wymagające dużego zaangażowania i pracy, ale satysfakcja jest gwarantowana, jak uśmiech dziecka, które wygrało.

Analiza wyników badania obnaża klasyczny problem w edukacji matematycznej: przepaść między intuicją wizualną a formalizmem matematycznym.

W procesie dydaktycznym należy:

- bezwzględnie zwalczać nawyk automatycznego łączenia przedziałów znakiem sumy przy monotoniczności;
- odczarować pojęcie granicy. Granica w matematyce to nie sztywny mur, a koncepcja „zbliżania się do celu”. To narzędzie pozwalające badać, co dzieje się na skraju nieskończoności lub w momentach, gdzie zwykłe liczenie (np. dzielenie przez zero) zawodzi. Pozwala precyzyjnie opisać dążenie do określonego stanu, nawet jeśli nigdy go nie osiągniemy;
- kłaść większy nacisk na translację: „co widzę na rysunku” a „jak to poprawnie zapisać językiem logiki i teorii mnogości”.

Literatura

Arkit A., *Realia i efektywność nauczania matematyki na kierunkach ekonomicznych*, „Zeszyty Naukowe Wydziału Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej” 2021, nr 72.

Encyklopedia szkolna. Matematyka, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1989.
Kwaśnicki W., *O matematyzacji ekonomii. Na marginesie artykułu S. Małeckiego-Tepichta*, „Ekonomista” 2012, nr 3.

Netografia

<https://pl.wikipedia.org/wiki/Matematyka>.

<https://rocketjobs.pl/blog/czym-sie-rozni-kariera-w-finansach-od-kariery-w-ekonomii>.

<https://zpe.gov.pl/podstawa-programowa/szkola-ponadpodstawowa/matematyka>.